

MATEMATICKÉ DŮKAZY.

Přímý důkaz ($A \Rightarrow B$): vycházíme z předpokladu dané věty a musíme se dopracovat k jejímu tvrzení

Např. $\forall a \in \mathbb{Z}^+; a = \text{liché č.} \Rightarrow a^2 = \text{liché č.}$

liché č.: $2k+1$, potom $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$, kde $4(k^2+k)$ je sudé.

Nepřímý důkaz ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow B' \Rightarrow A'$): dokazujeme větu obměněnou pomocí přímého důkazu.

Např. $\forall m \in \mathbb{Z}^+; m^2 \text{ dělitelné } 3 \Rightarrow m \text{ dělitelné } 3$

nedělitelné 3: $3k+1 \vee 3k+2$, potom $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ nebo

$(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k)+4$, kde $3(3k^2+4k)$ a $3(3k^2+2k)$ jsou dělitelná 3.

Důkaz sporem ($(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$):

Např. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

předpokládáme $\exists a, b \in \mathbb{R}^+; \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, po úpravách rovnice: $(a-b)^2 < 0$,

protože x^2 nemůže být < 0 – spor s předpokladem a daná věta platí.

1) Vypište typy důkazů a vysvětlete jejich podstatu.

2) Dokažte ekvivalenci:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: 2/n \Leftrightarrow 2/n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 5/n \Leftrightarrow 5/n^2$

3) Dokažte implikaci:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: 5/n \Rightarrow 30/n^3 - n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n \Rightarrow 16/n^4 - n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}: 5/(n^2+1) \Rightarrow 5 \nmid n$

4) Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

5) Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: 3/n \Rightarrow 3/n^2$.

6) Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: n \text{ je sudé} \Rightarrow n+2 \text{ je sudé}$.

7) Dokažte nebo vyvráťte platnost nerovnosti: $\sqrt{11+\sqrt{10}} \geq 1 + \sqrt{11-\sqrt{10}}$.

8) Vyslovte hypotézu o počtu úhlopříček v konvexním n -úhelníku ($p = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$) a pak ji dokažte.

MATEMATICKÁ INDUKCE

10) Dokažte matematickou indukci:

$$a) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$c) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \text{Po16/45}$$

$$d) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

11) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je.

$$a) \quad \text{číslo } n^3 + 11n \text{ dělitelné šesti.} \quad \text{Po17/50}$$

$$b) \quad \text{číslo } 5^n - 1 \text{ je dělitelné čtyřmi} \quad \text{Po18/52}$$

$$1) \quad 4/5^1 - 1$$

$$2) \text{ Předpokládám: } n = k : 4/5^k - 1$$

$$\text{Dokazují: } n = k+1 : 4/5^{k+1} - 1; \quad 5^{k+1} - 1 = 5^k \cdot 5 - 5 + 4 = 5 \cdot (5^k - 1) + 4; \quad 4/4 \wedge 4/5^k - 1$$

$$c) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 6/(n^3 + 5n)$$

$$d) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 5/(n^5 + 4n)$$

$$e) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 3/(4^n + 5)$$

$$f) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 16/(9^{n+1} - 8n - 9)$$

$$g) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$h) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

$$i) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1) \cdot (2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3 \cdot 4!}{2^3} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$