

KOMPLEXNÍ ČÍSLA – GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ

imaginární jednotka i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i \dots$

algebraický tvar komplexního čísla: $z = a + bi$, a reálná část, b – imaginární část

komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = a - bi$

absolutní hodnota: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, komplexní jednotka: $|z| = 1$

Goniometrický tvar: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, φ = argument,

Přiřazení komplexních čísel a bodů Gausovy roviny

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vzorce: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

1) Zobrazte v Gausově rovině:

a) $(2 - i) \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

b) $\frac{-1 + i}{1 + i}$

2) Převeďte na goniometrický tvar

a) $z = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

$$z = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

b) $z = \pi$

$$z = \pi (\cos 0 + i \sin 0)$$

3) Převeď na algebraický tvar $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{105}{4} \pi + i \sin \frac{105}{4} \pi \right)$

$$z = 1 + i$$

4) V Gausově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z , pro která platí:

a) $|z - i| = 2$

b) $|z - 1| \geq |z + 1|$

c) $|z| = z + \bar{z}$

d) $\left| \frac{z - 2}{z + 2} \right| \geq 4$

e) $1 < |z - 1| \leq 3$

f) $|z - 1| = |z - i| = |z - 1 - i|$

g) $\left| z - \frac{1 - 2i}{i} \right| \leq \left| z + \frac{1 - 2i}{i} \right|$

5) Napište všechna komplexní čísla $z = z_1 + z_2 i$, pro která platí:

$$|z| = 1 \text{ a zároveň } z_1 \cdot \sqrt{3} = z_2$$

6) Nalezte reálná čísla x, y tak, aby platilo: $(3 - 2i) \cdot x + (5 - 7i) \cdot y = 1 + 3i$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA – MOIVREOVA VĚTA

Moivreova věta: $[|z| \cdot \cos \varphi + i \sin \varphi]^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, n - přirozené číslo

Komplexní odmocnina $\sqrt[n]{a} = z \Leftrightarrow a = z^n, n \in \mathbb{N}, a, z \in \mathbb{C}$

7) Vypočítejte z^{10} , jestliže $z = 1 + i$

8) Vypočítejte z^{11} , jestliže $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

9) Vypočtěte:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)^4$

b) $(\sqrt{3} - i)^{-8}$

10) Vypočtěte a^5 : $a = \frac{15 - 5i}{1 + 2i} - \frac{1 - 3i}{i} + (3 + i) \cdot (-1 + 2i)$

11) Vypočtěte v oboru komplexních čísel:

a) $\sqrt[6]{-1}$

$$\text{St135/7 } \cos \varphi + i \sin \varphi, \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

b) $\sqrt[3]{8i}$

$$\{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\} \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

c) $\sqrt[4]{-8 + 8i}$

$$\{\sqrt{3} + i, -1 + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i, 1 - i\sqrt{3}\}$$

d) $\sqrt[4]{81}$

$$\{3, -3, 3i, -3i\}$$

12) Pomocí výpočtu třetí mocniny komplexních čísel vypočtěte:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^{60} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^{30} =$

$$\text{Po83/26 } (-1)^{20} + (-1)^{10} = 2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)^{60} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)^{30} =$$

$$i^{20} + (-i)^{10} = 1 - 10$$